



TUGAS AKHIR- SM141501

SIMULASI NUMERIK DARI PERMASALAHAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH ARTERI STENOSIS

FILSIANA NUR ALIF ROSDIANI
NRP 1211 100 008

Dosen Pembimbing :
Prof.Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Drs. Kamiran, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”



FINAL PROJECT- SM 091332

NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW PROBLEMS ON STENOSIS ARTERY BLOOD VESSEL

FILSIANA NUR ALIF ROSDIANI
NRP 1211 100 008

Supervisors:
Prof.Dr. Basuki Widodo, M.Sc
Drs. Kamiran, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty Of Mathematics and Natural Sciences
Sepuluh Nopember Institute Of Technology
Surabaya 2016

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

LEMBAR PENGESAHAN
SIMULASI NUMERIK DARI PERMASALAHAN
ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH ARTERI
STENOSIS

NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW
PROBLEMS ON STENOSIS ARTERY BLOOD VESSEL

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
FILSIANA NUR ALIF ROSDIANI
NRP. 1211 100 008

Menyetujui,
Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

Drs. Kamiran, M.Si
NIP. 19630623 198903 1 001

Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP. 19650605 198903 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

SIMULASI NUMERIK DARI PERMASALAHAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH ARTERI STENOSIS

Nama : *Filsiana Nur Alif Rosdiani*
NRP : *1211 100 008*
Jurusan : *Matematika FMIPA ITS*
Pembimbing : *1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc*
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstrak

Proses peredaran darah dipengaruhi oleh kecepatan darah, luas penampang pembuluh darah dan kerja otot jantung dan pembuluh darah. Proses peredaran darah merupakan contoh dinamika fluida pada tubuh manusia dan memiliki peran dalam perkembangan penyakit arteri. Salah satu contoh adalah penyempitan arteri. Penyempitan ini terjadi karena penumpukan plak aterosklerosis pada dinding pembuluh darah. Penyakit ini juga dikenal dengan sebutan arteri stenosis. Model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dikembangkan dari persamaan kontinuitas dan persamaan momentum. Model yang diperoleh merupakan Persamaan Differensial Parsial (PDP). Kemudian, persamaan tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga Alternating Direction Implicit. Dari simulasi diperoleh bahwa nilai kecepatan akan berkurang ketika mendekati arteri stenosis dan nilai kecepatan akan kembali normal ketika menjauhi arteri stenosis. Sehingga penyumbatan pembuluh darah dapat menyebabkan berkurangnya kecepatan aliran darah.

Kata kunci :Darah, Arteri Stenosis, metode ADI

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

NUMERICAL SIMULATION OF BLOOD FLOW PROBLEMS ON STENOSIS ARTERY BLOOD VESSEL

Name : *Filsiana Nur Alif Rosdiani*
NRP : *1211 100 008*
Department : *Mathematics*
Supervisor : *1. Prof.Dr. Basuki Widodo,*
M.Sc
2. Drs. Kamiran, M.Si

Abstract

Circulatory process is influenced by blood velocity, area of blood vessels and muscle of vessels and heart performance. Circulatory process is an example of fluid dynamics in the human body and has a role in development of artery disease. One example is narrowing of artery. This narrowing occurs due to a buildup of atherosclerotic plaque in the wall of blood vessel. This disease is also known as artery with stenosis. Mathematical model of blood flow problem in the artery stenosis developed from the continuity equation and momentum equation. The model obtained in the form of partial differential equations. Then, the equation is solved using an implicit finite difference method of Alternating Direction Implicit. From the simulation shows that, the value of the speed will reduced when approaching artery stenosis and the value of the speed will return to normal when away from the artery stenosis. So clogged arteries can reduce blood flow velocity.

Keyword: Blood, Artery with stenosis, ADI Method

“Halaman ini sengaja dikosongkan.”

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Alhamdulillahirobbil'aalamin, segala Puji bagi Allah SWT Tuhan semesta alam yang telah memberikan karunia, rahmat dan anugerah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

“SIMULASI NUMERIK DARI PERMASALAHAN ALIRAN DARAH PADA PEMBULUH DARAH ARTERI STENOSIS”

yang merupakan salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat kerja sama, bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Sehubungan dengan hal itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc dan Bapak Drs. Kamiran, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
2. Bapak Dr. Imam Mukhlas, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
3. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi S-1 Jurusan Matematika.
4. Ibu Sunarsini, S.Si, M.Si selaku Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
5. Ibu Dra. Nur Asiyah, M.Si, Bapak Drs. Daryono Budi Utomo, M.Si dan Dr. Chairul Imron, M.Ikom selaku

Dosen Penguji yang telah memberikan saran demi perbaikan Tugas Akhir.

6. Seluruh jajaran dosen dan staf jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Dalam pelaksanaan Tugas Akhir ini, penulis memperoleh dukungan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih secara khusus kepada :

1. Kedua orang tua, Bapak M. Tohir dan Ibu Subina Manut tercinta yang senantiasa dengan ikhlas memberikan kasih sayang, semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti bagi penulis.
2. Saudara kandung, Mas Mundir dan Adik Hesti yang selalu mendoakan, memberi motivasi dan kasih sayang kepada penulis.
3. Saudara ipar, Mbak Chalimatus dan ponakan tercinta, Sesa yang selalu memberi motivasi dan menghibur kepada penulis.
4. Sahabat-sahabat dekat, Brasil, Yessy, Wina, Oky , Irda, Marmel, Chaca, Ulva, Afifah dan Yessy Vita yang selalu ada dan mensupport penulis disaat-saat sedih.
5. Teman-teman angkatan 2011, terima kasih atas semangat, bantuan serta doanya.
6. Teman-teman angkatan 2012, terutama Nana, Rina, Lala dan Devi atas semangat, bantuan serta doanya.
7. Mas Tony, Mbak Indira dan Mbak Anisa yang sudah membantu disaat penulis mengalami kesulitan memahami sesuatu.

Dan masih banyak lagi pihak lain yang terlibat dalam penyelesaian Tugas Akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu-satu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang berlebih bagi pihak-pihak yang membantu penulis. *Aamiin ya rabbal 'alamin.*

Penulis menyadari bahwa Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan

saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Juli 2016

Penulis

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI	xv
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR SIMBOL.....	xix
DAFTAR LAMPIRAN.....	xxi
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan	3
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Fluida.....	6
2.3 Stenosis Arteri	6
2.4 Persamaan Diferensial Parsial	7
2.5 Metode Beda Hingga	7
2.6 Metode Beda Hingga – Alternating Direct Implicit (ADI)	10
2.7 Persamaan Pembangun Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis	12
BAB III. METODE PENELITIAN	
3.1 Tahapan Penelitian	15
3.2 Diagram Alur Penelitian	17

BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

4.1	Persamaan Pembangun Non Dimensional ..	19
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	20
4.2.1	Persamaan Kekekalan Momentum Non Dimensional	20
4.2	Penurunan Persamaan Pembangun Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis	22
4.2.1	Penurunan Persamaan Kontinuitas	23
4.2.2	Penurunan Persamaan Kekekalan Momentum	24
4.3	Kondisi Batas	26
4.4	Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis	27
4.5	Penyelesaian Numerik dari Model Matematika pada Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis	30
4.5.1	Penurunan Persamaan Kekekalan Momentum	30
4.5.2	Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis	37
4.6	Algoritma Program	38
4.7	Simulasi pada Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis	39

BAB V. PENUTUP

5.1	Kesimpulan.....	45
5.2	Saran.....	46

DAFTAR PUSTAKA.....	47
----------------------------	-----------

LAMPIRAN	49
-----------------------	-----------

BIODATA PENULIS	59
------------------------------	-----------

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Skema Model Aliran Stenosis 6
Gambar 2.2	Pengaturan Titik Grid 11
Gambar 3.1	Diagram Alur Penelitian 17
Gambar 4.1	Profil Kecepatan pada Sumbu Aksial dengan $z = 60$ mm, $t = 0.13333$ s, $\delta_1 =$ $\delta_2 = 0.2$ mm 40
Gambar 4.2	Profil Kecepatan pada Sumbu Radial dengan $z = 60$ mm, $Re=500$, $\delta_1 = \delta_2 =$ 0.2 mm 41
Gambar 4.3	Profil Kecepatan pada Sumbu Aksial dengan $z = 60$ mm, $t = 0.13333$ s, $\delta_1 =$ $\delta_2 = 0.3$ mm 42
Gambar 4.4	Profil Kecepatan pada Sumbu Aksial dengan $z = 60$ mm, $Re=500$, $\delta_1 = \delta_2 =$ 0.3 mm 43

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR SIMBOL

R	Jari-jari pada stenosis arteri
R_0	Jari-jari konstan arteri yang normal
ϕ	Sudut lancip pada sumbu arteri
δ_1	Ketebalan stenosis arteri pertama
δ_2	Ketebalan stenosis arteri kedua
ω	Frekuensi angular
f_p	Frekuensi denyut pada jantung
w	Kecepatan aliran darah arah aksial
u	Kecepatan aliran darah arah radial
U_0	Kecepatan aliran darah
p	Tekanan yang terjadi di dalam darah
Re	Bilangan Reynold
A_0	Amplitudo yang bernilai konstan
A_1	Amplitudo dari tekanan gradien

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

DAFTAR LAMPIRAN

LAMPIRAN A	<i>Source Code</i> Program Menggunakan <i>Software</i> MATLAB	49
------------	--	----

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III

METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada tugas akhir ini. Disamping ini, dijelaskan pula prosedur pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Beberapa tahap penelitian yang dilakukan, yaitu:

3.1. Tahapan Penelitian

Berikut ini adalah tahapan-tahapan dalam mengerjakan tugas akhir ini:

a. Studi literatur

Pada tahap ini akan dilakukan pengumpulan informasi dan pemahaman yang lebih mendalam mengenai teori-teori dasar yang mendukung permasalahan dalam usulan Tugas Akhir ini dan mengumpulkan berbagai informasi yang mendukung penelitian.

b. Perumusan model matematika

Pada tahap ini dilakukan perumusan model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dan diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga – *Alternating Direction Implicit (ADI)* .

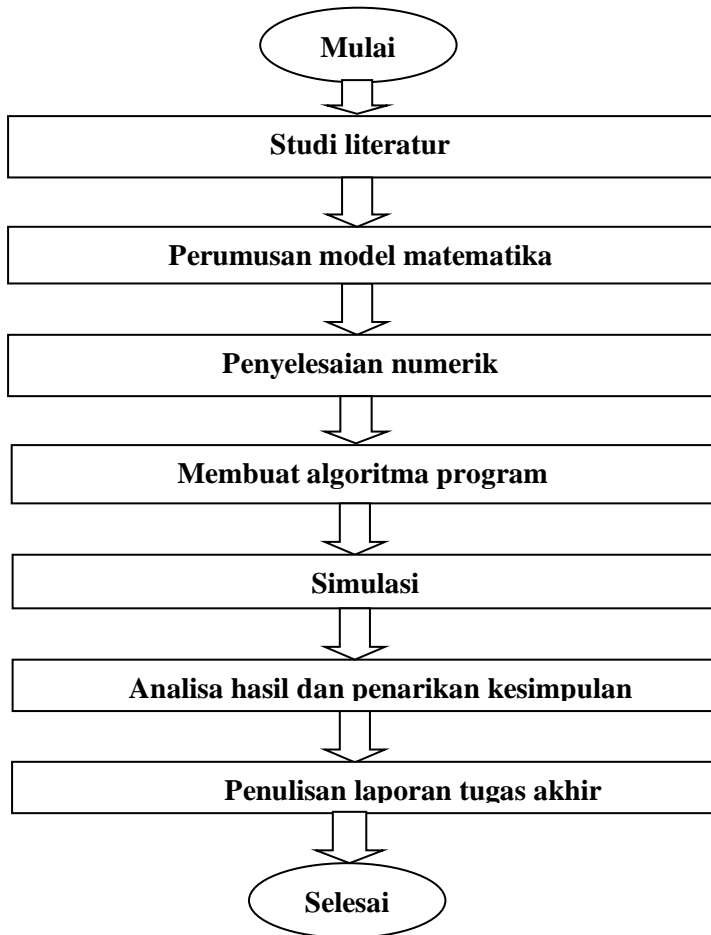
c. Penyelesaian numerik

Pada tahap ini dilakukan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode beda hingga-*Alternating Direction Implicit (ADI)*. Metode ini digunakan untuk penyelesaian numerik dari model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis.

- d. Membuat algoritma program
Pada tahap ini, dibuat algoritma penyelesaian dari persamaan diskrit pada metode beda hingga implisit Alternating Direct Implicit.
- e. Simulasi
Pada tahap ini dilakukan simulasi hasil penyelesaian model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dengan menggunakan software Matlab. Hal ini bertujuan agar hasil penelitian lebih mudah dipahami.
- f. Analisa hasil dan penarikan kesimpulan
Pada tahap ini dilakukan analisa hasil dari simulasi dan kemudian diambil kesimpulan dari analisa yang telah dilakukan serta memberikan saran untuk pengembangan berikutnya.
- g. Penulisan Laporan Tugas Akhir
Pada tahap ini, penulis menuliskan semua hasil yang telah didapatkan selama pengerjaan Tugas Akhir.

3.2. Diagram Alir Metode Penelitian

Secara umum tahapan-tahapan yang dilakukan dalam menyelesaikan tugas akhir ini dapat ditampilkan dalam diagram alir penelitian pada Gambar 3.1 dibawah ini:



Gambar 3.1 Diagram Alur Penelitian

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

BAB IV

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai persamaan pembangun non dimensional, penurunan persamaan pembangun model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis, kondisi batas, model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis, penyelesaian numerik, algoritma program dan simulasinya.

4.1 Persamaan Pembangun Non Dimensional

Persamaan pembangun yang telah diperoleh masih mengandung dimensi/satuan, sehingga dalam proses simulasi banyak mengalami kesulitan dalam menyeragamkan dimensi/satuan. Agar persamaan tersebut dapat disimulasikan tanpa bergantung dengan dimensi/satuan, maka persamaan-persamaan yang ada harus dibentuk ke dalam persamaan non dimensional.

Adapun variabel non dimensional tersebut adalah sebagai berikut [4]:

$$t = \frac{r_0}{U_0} t^*$$

$$r = r_0 r^*$$

$$z = r_0 z^*$$

$$u = U_0 u^*$$

$$w = U_0 w^*$$

$$p = (U_0)^2 \rho p^*$$

Untuk mendapatkan persamaan pembangun non dimensi, maka substitusikan variabel non dimensional yang sesuai ke masing-masing persamaan kekekalan massa dan kekekalan momentum sebagai berikut:

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Berikut adalah persamaan kontinuitas dimensional pada Persamaan (2.4):

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Substitusikan variabel-variabel non dimensional pada persamaan diatas, sehingga diperoleh:

$$\frac{U_0 \partial(u^*)}{r_0 \partial(r^*)} + \frac{U_0 u^*}{r_0 r^*} + \frac{U_0 \partial(w^*)}{r_0 \partial(z^*)} = 0 \quad (4.1)$$

Persamaan (4.1) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{u^*}{r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (4.2)$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga Persamaan (4.2) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

4.1.2 Persamaan Kekekalan Momentum Non Dimensional

Berikut adalah persamaan kekekalan momentum dimensional terhadap sumbu z pada Persamaan (2.2):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Subtitusikan variabel-variabel non dimensional pada persamaan diatas, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial(w^*)}{\partial(t^*)} + u^* \frac{\partial(w^*)}{\partial(r^*)} + w^* \frac{\partial(w^*)}{\partial(z^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(z^*)} + \frac{\mu}{\rho U_0 r_0} \left(\frac{\partial^2(w^*)}{\partial(r^*)^2} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(w^*)}{\partial(r^*)} + \frac{\partial^2(w^*)}{\partial(z^*)^2} \right) \quad (4.3)$$

Persamaan (4.3) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial(w^*)}{\partial(t^*)} + u^* \frac{\partial(w^*)}{\partial(r^*)} + w^* \frac{\partial(w^*)}{\partial(z^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(z^*)} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2(w^*)}{\partial(r^*)^2} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(w^*)}{\partial(r^*)} + \frac{\partial^2(w^*)}{\partial(z^*)^2} \right) \quad (4.4)$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga persamaan (4.4) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Dengan Re adalah bilangan tanpa dimensi (bilangan Reynold):

$$Re = \frac{\rho U_0 r_0}{\mu}$$

Berikut adalah persamaan kekekalan momentum dimensional terhadap sumbu r pada Persamaan (2.3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Subtitusikan variabel-variabel non dimensional pada persamaan diatas, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + u^* \frac{\partial(u^*)}{\partial(r^*)} + w^* \frac{\partial(u^*)}{\partial(z^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(r^*)} + \frac{\mu}{\rho U_0 r_0} \frac{\partial^2(u^*)}{\partial(r^*)^2} + \frac{\mu}{\rho U_0 r_0} \frac{1}{r^*} \frac{\partial(u^*)}{\partial(r^*)} + \frac{\mu}{\rho U_0 r_0} \frac{\partial^2(w^*)}{\partial(z^*)^2} \quad (4.5)$$

Persamaan (4.5) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial(u^*)}{\partial(t^*)} + u^* \frac{\partial(u^*)}{\partial(r^*)} + w^* \frac{\partial(u^*)}{\partial(z^*)} = -\frac{\partial(p^*)}{\partial(r^*)} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2(u^*)}{\partial(r^*)^2} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial(u^*)}{\partial(r^*)} + \frac{\partial^2(w^*)}{\partial(z^*)^2} \right) \quad (4.6)$$

Untuk memudahkan penulisan selanjutnya, maka tanda bintang dihilangkan, sehingga persamaan (4.6) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

4.2 Penurunan Persamaan Pembangun Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis

Pada sub bab ini membahas penurunan persamaan pembangun model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis yang memuat persamaan kontinuitas non dimensional dan persamaan kekekalan momentum non dimensional yang telah diperoleh pada sub bab sebelumnya. Berikut adalah persamaan-persamaan pembangun yang digunakan pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4.8)$$

4.2.1 Penurunan Persamaan Kontinuitas

Diberikan koordinat transformasi radial sebagai berikut :

$$\xi = \frac{r}{R(z,t)} \quad (4.9)$$

dengan

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{R} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial R} = \frac{-r}{R^2} \quad (4.11)$$

Transformasi koordinat dari Persamaan (4.7) dengan substitusi Persamaan (4.9) dapat dijelaskan sebagai berikut,

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dengan transformasi radial maka

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{u}{r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \right) = 0$$

Dapat disederhanakan menjadi,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Substitusi Persamaan (4.10) dan Persamaan (4.11) kedalam persamaan diatas, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{R} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(-\frac{r}{R^2} \right) \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Substitusi nilai $r = \xi R$ sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{R} + \frac{u}{\xi R} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(-\frac{\xi R}{R^2} \right) \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Penyederhanaan persamaan diatas menjadi

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi R} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\xi}{2R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (4.12)$$

4.2.2 Penurunan Persamaan Kekekalan Momentum

Transformasi koordinat dari Persamaan (4.8) dengan substitusi Persamaan (4.9) yang menerapkan pengoperasian aturan berantai dapat dijelaskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\ \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial t} \right) + u \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + w \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \right) &= \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right) \end{aligned}$$

Substitusi Persamaan (4.9) dan Persamaan (4.10) kedalam persamaan diatas, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{r}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{wr}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ \frac{1}{R_e} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) + \frac{1}{Rr} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Dengan melakukan pengoperasian turunan pada persamaan tersebut, akan diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{r}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{wr}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& \frac{1}{R_e} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{Rr} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{r}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{r}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{r}{R^2} \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{r}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{wr}{2R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& \frac{1}{R_e} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{r}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{r}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{2r}{R^3} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Substitusi nilai $r = \xi R$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\xi}{2R} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w\xi}{2R} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \\
& \frac{1}{R_e} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\xi}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{2\xi}{R^2} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{2u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial p}{\partial z} + \\
& \frac{1}{R_e} \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{2\xi}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \right) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

4.3 Kondisi Batas

Kondisi batas yang diberikan pada arteri stenosis dibedakan menjadi tiga kasus, yaitu:

Kondisi batas kecepatan radial dan gradien kecepatan terhadap sumbu yang sejajar dengan pembuluh darah, masing-masing dinyatakan dengan

$$u(\xi, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, z, t) = 0 \quad \text{pada } \xi = 0$$

Kondisi batas kecepatan radial dan kecepatan aksial pada dinding pembuluh darah, masing-masing dinyatakan dengan

$$u(\xi, z, t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad w(\xi, z, t) = 0 \quad \text{pada } \xi = 1$$

Kondisi batas gradient kecepatan aksial dan kecepatan radial pada hilir pembuluh darah, masing-masing dinyatakan dengan

$$\frac{\partial w}{\partial z}(\xi, z, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial z}(\xi, z, t) \quad \text{pada } z = L$$

Kondisi batas pada saat dalam keadaan diam adalah

$$u(\xi, z, t) = 0, \quad w(\xi, z, t) = 0 \quad \text{pada } t = 0$$

4.4 Model Matematika dari Permasalahn Aliran Darah pada Arteri Stenosis

Pemodelan matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis diperoleh dari transformasi persamaan kontinuitas kemudian akan diperoleh kecepatan radialnya, sedangkan kecepatan aksialnya diperoleh dari diskritisasi transformasi aksial.

Pada Persamaan (4.12) dikalikan dengan ξR sehingga diperoleh

$$\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + u + \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut

$$u = \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Persamaan diatas diintegalkan dengan variabel ξ sehingga diperoleh

$$\int_0^\xi u d\xi = \int_0^\xi \left(\frac{\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\xi$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\int_0^\xi u d\xi = \int_0^\xi \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi - \int_0^\xi \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi - \int_0^\xi \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} d\xi$$

Dengan menggunakan pengoperasian integral parsial didapatkan nilai $\int_0^\xi \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi$, $\int_0^\xi \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi$ dan $\int_0^\xi \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} d\xi$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\int_0^\xi \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi &= \frac{1}{2} \left(\xi^2 \frac{\partial R}{\partial z} w - \int_0^\xi 2w\xi \frac{\partial R}{\partial z} d\xi \right) \\
&= \frac{w\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\xi w\xi d\xi \\
\int_0^\xi \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi &= u\xi - \int_0^\xi u d\xi
\end{aligned}$$

Dan

$$\int_0^\xi \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} d\xi = \int_0^\xi \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} d\xi$$

Sehingga diperoleh nilai dari $\int_0^\xi u d\xi$ adalah sebagai berikut

$$u\xi = \frac{w\xi^2}{2} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\xi w\xi d\xi - \int_0^\xi \frac{\xi R}{2} \frac{\partial w}{\partial z} d\xi$$

Maka diperoleh persamaan $u(\xi, z, t)$ sebagai berikut

$$u(\xi, z, t) = \frac{w\xi}{2} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\xi w\xi d\xi - \frac{R}{2\xi} \int_0^\xi \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi \quad (4.14)$$

Persamaan (4.14) disubstitusikan dengan kondisi batas sebagai berikut $u(\xi, z, t)|_{\xi=1} = \frac{\partial R}{\partial t}$ dan $w(\xi, z, t)|_{\xi=1} = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial t} &= (0) \left(\frac{\xi}{2} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^1 w\xi d\xi - \frac{R}{2\xi} \int_0^1 \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi \right) \\
\frac{\partial R}{\partial t} &= -\frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^1 w\xi d\xi - \frac{R}{2\xi} \int_0^1 \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi
\end{aligned}$$

Dengan pemindahan ruas maka persamaan berubah menjadi

$$\frac{R}{2\xi} \int_0^1 \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi = -\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^1 w\xi d\xi$$

Dengan perkalian $\frac{\xi}{R}$ terhadap ruas kanan dan kiri maka

$$\int_0^1 \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi = -\frac{2\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^1 w \xi d\xi \quad (4.15)$$

Agar Persamaan (4.15) dapat diselesaikan, maka pada persamaan $\frac{2\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t}$ dikalikan dengan $\int_0^1 f(\xi) d\xi$ sehingga diperoleh persamaan $\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \int_0^1 \xi f(\xi) d\xi$ dengan $f(\xi)$ ditunjukkan dengan fungsi yang memenuhi persamaan $\int_0^1 \xi f(\xi) d\xi = 1$. Dari penjelasan diatas, dapat diperoleh persamaan baru yaitu:

$$\int_0^1 \xi \frac{\partial w}{\partial z} d\xi = \int_0^1 \xi \left(-\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} f(\xi) - \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w \right) d\xi \quad (4.16)$$

Pada Persamaan (4.16) dilakukan pengoperasian integral dengan limit mendekati 1, akan diperoleh hasil:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \xi^2 \Big|_{\xi=1} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} f(\xi) - \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w \right) \xi^2 \Big|_{\xi=1} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} f(\xi) - \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nilai fungsi $f(\xi)$ yang diberikan oleh Mandal (2005) adalah

$$f(\xi) = -4(\xi^2 - 1) \quad (4.18)$$

Substitusi Persamaan (4.18) pada Persamaan (4.17) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{8}{R} \frac{\partial R}{\partial t} (\xi^2 - 1) - \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} w \quad (4.19)$$

Kemudian substitusi Persamaan (4.18) kedalam Persamaan (4.14) sehingga diperoleh

$$u(\xi, z, t) = \xi \left(-2 \frac{\partial R}{\partial t} (\xi^2 - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial z} w \right) \quad (4.20)$$

4.5 Penyelesaian Numerik dari Model Matematika pada Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis

Metode beda hingga yang digunakan untuk model matematika pada permasalahan aliran darah pada arteri stenosis adalah untuk diskritisasi terhadap waktu menggunakan skema maju dan untuk diskritisasi terhadap ruang menggunakan skema tengah.

4.5.1 Penurunan Persamaan Kekekalan Momentum

Berikut adalah penurunan persamaan kekekalan momentum pada model matematika pada permasalahan aliran darah pada arteri stenosis pada Persamaan (4.13) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{2u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \frac{1}{R_e} \left(\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{2\xi}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{2u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{w\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R_e} \frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \\ \frac{1}{R_e} \frac{2}{\xi R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{R_e} \frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} - \\ \frac{1}{R_e} \frac{2\xi}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{aligned}$$

Diskritisasi pada langkah pertama (*fixed row j*) adalah:

$$\begin{aligned}
& \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} = \\
& \left(\frac{\xi_j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n \left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta\xi} \right) - 2 \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) \left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta\xi} \right) + \\
& \frac{w_{i,j}^n \xi_j}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta\xi} \right) + \frac{1}{Re} \frac{2}{(R_i^n)^2} \left(\frac{w_{i,j+1}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{(\Delta\xi)^2} \right) + \\
& \frac{1}{Re} \frac{2}{\xi_j (R_i^n)^2} \left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta\xi} \right) - \frac{1}{Re} \frac{\xi_j}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n \left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta\xi} \right) - \\
& \frac{1}{Re} \frac{2\xi_j}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \left(\frac{w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n}{2\Delta\xi} \right) - \\
& \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{\xi_j}{R_i^n} \left(\frac{w_{i+1,j+1}^n - w_{i-1,j+1}^n - w_{i+1,j-1}^n + w_{i-1,j-1}^n}{4\Delta\xi\Delta z} \right) - \\
& w_{i,j}^n \left(\frac{w_{i+1,j}^{n+1} - w_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{w_{i+1,j}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta z)^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Yang dapat diatur menjadi:

$$\begin{aligned}
& \left[w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i+1,j}^{n+1} + \left[1 + \frac{1}{Re} \left(\frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i,j}^{n+1} + \\
& \left[-w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) - \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{2(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i-1,j}^{n+1} = \\
& \left[-\frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j+1}^n + \left[\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n - \right. \\
& \left(\frac{\Delta t}{\Delta\xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{Re} \frac{1}{(R_i^n)^2} + \\
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{Re} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{j}{Re} \frac{j}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n - \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{Re} \frac{j}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \right] w_{i,j+1}^n + \\
& + \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j+1}^n + \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{Re} \frac{4}{(R_i^n)^2} \right] w_{i,j}^n + \\
& \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j-1}^n + \left[-\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n + \right. \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{\Delta\xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{Re} \frac{1}{(R_i^n)^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{j}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n + \\
& \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{j}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \Big] w_{i,j-1}^n + \\
& \left[-\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j-1}^n - 2\Delta t \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{n+1} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Persamaan (4.21) dapat disederhanakan menjadi,

$$A_i w_{i,j}^{n+1} + B_i w_{i+1,j}^{n+1} + C_i w_{i-1,j}^{n+1} = D_i \quad (4.22)$$

Dengan

$$A_i = 1 + \frac{1}{R_e} \left(\frac{2\Delta t}{(\Delta z)^2} \right)$$

$$B_i = w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) - \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right)$$

$$C_i = -w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) - \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
D_i = & \left[-\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j+1}^n + \left[\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n - \right. \\
& \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(R_i^n)^2} + \\
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{j}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n - \\
& \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{j}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \Big] w_{i,j+1}^n + \\
& + \left[\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j+1}^n + \left[1 - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{4}{(R_i^n)^2} \right] w_{i,j}^n + \\
& \left[\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j-1}^n + \left[-\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n + \right. \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(R_i^n)^2} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e(j)(R_i^n)^2} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{j}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n + \\
& \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{j}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \Big] w_{i,j-1}^n + \\
& \left[-\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j-1}^n - 2\Delta t \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Persamaan (4.22) menghasilkan sistem persamaan linier (SPL) tridiagonal pada setiap n jika persamaan-persamaan tersebut diterapkan baris per baris atau dikenal sebagai *z sweep*. Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{pmatrix}
A_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
C_2 & A_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & C_{imax-1} & A_{imax-1} & B_{imax-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{imax} & A_{imax}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
w_{1,j}^{n+1} \\
w_{2,j}^{n+1} \\
\vdots \\
\vdots \\
w_{imax-1,j}^{n+1} \\
w_{imax,j}^{n+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
D_1 \\
D_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
D_{imax-1} \\
D_{imax}
\end{pmatrix}$$

Sistem persamaan linier di atas kemudian diselesaikan dengan bantuan software Matlab untuk mencari nilai $w_{1,j}^{n+1}$ sampai dengan $w_{imax,j}^{n+1}$.

Sedangkan pada langkah kedua (*fixed coloumn i*) adalah:

$$\begin{aligned}
& \frac{w_{i,j}^{n+1} - w_{i,j}^n}{\Delta t} = \\
& \left(\frac{\xi_j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right) - 2 \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right) + \\
& \frac{w_{i,j}^n \xi_j}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right) + \frac{1}{R_e} \frac{2}{(R_i^n)^2} \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - 2w_{i,j}^{n+1} + w_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta\xi)^2} \right) + \\
& \frac{1}{R_e} \frac{2}{\xi_j (R_i^n)^2} \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right) - \frac{1}{R_e} \frac{\xi_j}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right) - \\
& \frac{1}{R_e} \frac{\xi_j}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i \right)^2 \left(\frac{w_{i,j+1}^{n+1} - w_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\xi} \right) - \\
& \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i \frac{\xi_j}{R_i^n} \left(\frac{w_{i+1,j+1}^n - w_{i-1,j+1}^n - w_{i+1,j-1}^n + w_{i-1,j-1}^n}{4\Delta\xi\Delta z} \right) - \\
& w \left(\frac{w_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{R_e} \left(\frac{w_{i+1,j}^n - 2w_{i,j}^n + w_{i-1,j}^n}{(\Delta z)^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Yang dapat diatur menjadi:

$$\begin{aligned}
& \left[- \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i + \left(\frac{\Delta t}{\Delta\xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i - \right. \\
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{2}{(R_i^n)^2} - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i + \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i \right)^2 \right] w_{i,j+1}^{n+1} + \\
& \left[1 + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{4}{(R_i^n)^2} \right] w_{i,j}^{n+1} + \left[\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i - \right. \\
& \left(\frac{\Delta t}{\Delta\xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{2}{(R_i^n)^2} + \\
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta\xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i - \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i \right)^2 \right] w_{i,j-1}^{n+1} = \\
& \left[- \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j+1}^n + \left[- w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i+1,j}^n + \left[\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j+1}^n + \\
& \left[1 - \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i,j}^n + \left[\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j-1}^n + \\
& \left[w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i-1,j}^n + \\
& \left[-\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j-1}^n - 2\Delta t \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^n
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Persamaan (4.23) dapat disederhanakan menjadi,

$$A_j w_{i,j}^{n+1} + B_j w_{i,j+1}^{n+1} + C_j w_{i,j-1}^{n+1} = D_j \tag{4.24}$$

Dengan:

$$\begin{aligned}
A_j &= \left[1 + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{4}{(R_i^n)^2} \right] \\
B_j &= \left[-\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n + \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n - \right. \\
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{2}{(R_i^n)^2} - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n + \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \right] \\
C_j &= \left[\left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{j}{R_i^n} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta \xi} \right) \left(\frac{u_{i,j}^n}{R_i^n} \right) + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{w_{i,j}^n(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n - \right. \\
& \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{2}{(R_i^n)^2} + \left(\frac{\Delta t}{(\Delta \xi)^2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{1}{(j)(R_i^n)^2} - \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{R_i^n} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right)_i^n - \\
& \left. \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \frac{1}{R_e} \frac{(j)}{(R_i^n)^2} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right)^2 \right] \\
D_j &= \left[-\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j+1}^n + \left[-w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i+1,j}^n + \left[\frac{1}{R_e} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j+1}^n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i,j}^n + \left[\frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i+1,j-1}^n + \\
& \left[w_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{2\Delta z} \right) + \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \right) \right] w_{i-1,j}^n + \\
& \left[-\frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{4\Delta z} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \frac{j}{R_i^n} \right] w_{i-1,j-1}^n - 2\Delta t \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^n
\end{aligned}$$

Persamaan (4.24) menghasilkan sistem persamaan linier (SPL) tridiagonal pada setiap n jika persamaan-persamaan tersebut diterapkan baris per baris atau dikenal sebagai ξ *sweep*. Jika ditulis dalam bentuk matriks menjadi:

$$\begin{pmatrix}
A_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
C_2 & A_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & C_{jmax-1} & A_{jmax-1} & B_{jmax-1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & C_{jmax} & A_{jmax}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
w_{i,1}^{n+1} \\
w_{i,2}^{n+1} \\
\vdots \\
\vdots \\
w_{i,jmax-1}^{n+1} \\
w_{i,jmax}^{n+1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
D_1 \\
D_2 \\
\vdots \\
\vdots \\
D_{jmax-1} \\
D_{jmax}
\end{pmatrix}$$

Sistem persamaan linier di atas kemudian diselesaikan dengan bantuan software Matlab untuk mencari nilai $w_{i,1}^{n+1}$ sampai dengan $w_{i,jmax}^{n+1}$.

4.5.2 Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis

Berikut adalah model matematika dari kecepatan radial pada pembuluh darah arteri stenosis pada Persamaan (4.20) :

$$u(\xi, z, t) = \xi \left(-2 \frac{\partial R}{\partial t} (\xi^2 - 1) + \frac{w}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$u_{i,j}^{n+1} = \xi_j \left(-2 \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n \left((\xi_j)^2 - 1 \right) + \frac{w_{i,j}^{n+1}}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n \right) \quad (4.25)$$

Persamaan (4.25) dapat diatur menjadi:

$$u_{i,j}^{n+1} = A_{i,j}^n w_{i,j}^{n+1} + B_{i,j}^n \quad (4.26)$$

dengan

$$A_{i,j}^n = \frac{j\Delta j}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^n$$

$$B_{i,j}^n = \left(-2j\Delta j \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^n ((j\Delta j)^2 - 1) \right)$$

Persamaan (4.26) menghasilkan sistem persamaan linier (SPL) tridiagonal sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} u_{i,1}^{n+1} \\ u_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{i,jmax-1}^{n+1} \\ u_{i,jmax}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{i,1}^n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{i,2}^n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & A_{i,jmax-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{i,jmax}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{i,1}^{n+1} \\ w_{i,2}^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{i,jmax-1}^{n+1} \\ w_{i,jmax}^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{i,1}^n \\ B_{i,2}^n \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{i,jmax-1}^n \\ B_{i,jmax-1}^n \end{pmatrix}$$

4.6 Algoritma Program

Pada tugas akhir ini, penyelesaian numerik dari model kecepatan aksial mempengaruhi penyelesaian numerik dari model kecepatan radial. Dengan menggunakan nilai parameter-parameter yang berbeda-beda, maka algoritma penyelesaiannya sebagai berikut:

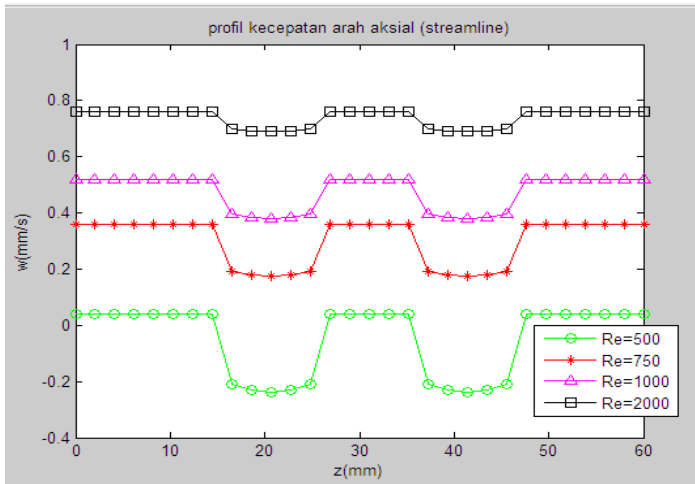
1. Mendefinisikan parameter-parameter yang dibutuhkan dengan input $L = 60mm, S_1 = 20mm, Z_1 = 5mm, S_2 = 40mm, Z_2 = 5mm$
2. Membentuk matriks tridiagonal pada sisi kiri dan vektor kolom pada sisi kanan pada kecepatan aksial.

3. Membentuk matriks diagonal pada sisi kanan dan vektor kolom pada sisi kanan pada kecepatan radial.
4. Mendefinisikan syarat awal dan syarat batas pada kecepatan aksial dan radial.
5. Menyelesaikan skema numerik dengan mengoperasikan matriks-matriks yang sudah terbentuk sehingga didapat nilai kecepatan pada titik-titik sepanjang sumbu aksial dan sumbu radial.
6. Menampilkan grafik kecepatan aksial dengan perbedaan parameter bilangan reynold.
7. Menampilkan grafik kecepatan radial dengan perbedaan parameter waktu.

4.7 Simulasi Kecepatan Aksial dan Kecepatan Radial pada Model Matematika Arteri Stenosis

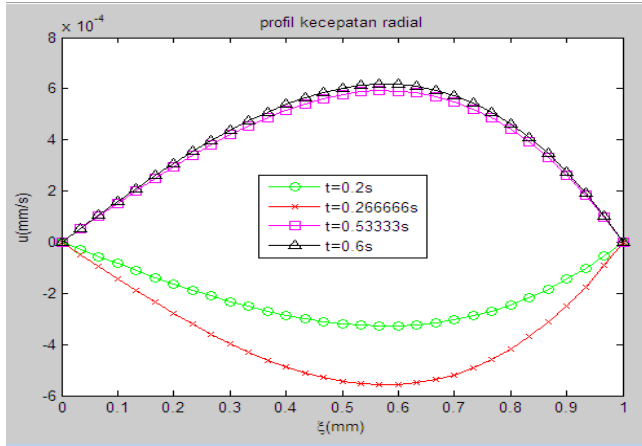
Diberikan nilai $L = 60mm, S_1 = 20mm, Z_1 = 5mm, S_2 = 40mm, Z_2 = 5mm, \delta_1 = \delta_2 = 0.2mm, R_0 = 1mm, f_p = 1.2Hz, k_R = 0.0001, \omega = 2.\pi f_p, \phi = 0^0, A_0 = 500kg\ m^{-2}s^{-2}, A_1 = 0.2A_0$

Ilustrasi hasil dari program Matlab pada sumbu aksial dan radial pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada stenosis arteri yaitu:



Gambar 4.1 Profil kecepatan pada sumbu aksial dengan $z=60$ mm, $t=0.13333s$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.2mm$

Pada Gambar (4.1) terlihat bahwa semakin besar nilai bilangan reynold, nilai kecepatan aksial akan semakin besar. Hal ini disebabkan karena besarnya bilangan reynold sebanding dengan kecepatan aliran. Sehingga semakin besar nilai bilangan reynold yang diberikan, nilai kecepatan akan semakin besar.

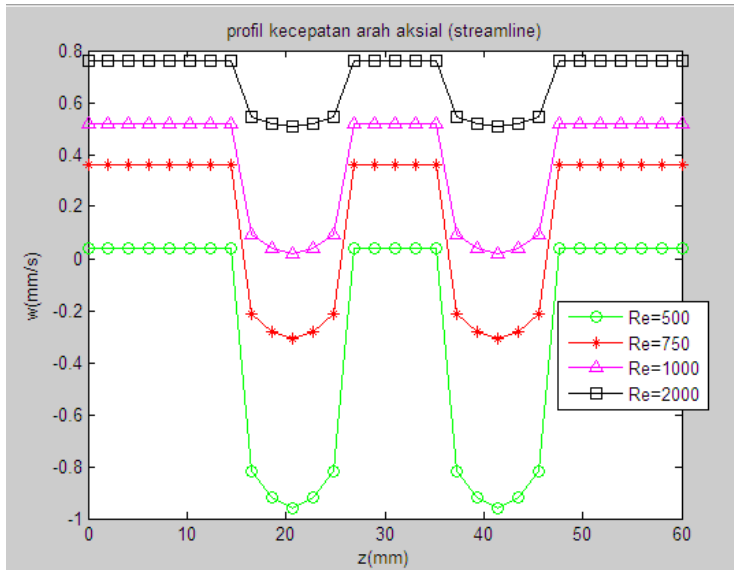


Gambar 4.2 Profil kecepatan pada sumbu radial dengan $z=60\text{mm}$, $Re=500$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.2\text{mm}$

Pada Gambar (4.2) terlihat bahwa untuk $t=0.2\text{s}$ menghasilkan kecepatan radial yang nilainya jauh lebih besar dibandingkan dengan kecepatan radial pada $t=0.266666\text{s}$ dan untuk $t=0.53333\text{s}$ menghasilkan kecepatan radial yang nilainya jauh lebih kecil dibandingkan dengan kecepatan radial pada $t=0.6\text{s}$. Sehingga besar atau kecilnya nilai t tidak mempengaruhi pada nilai kecepatan radial.

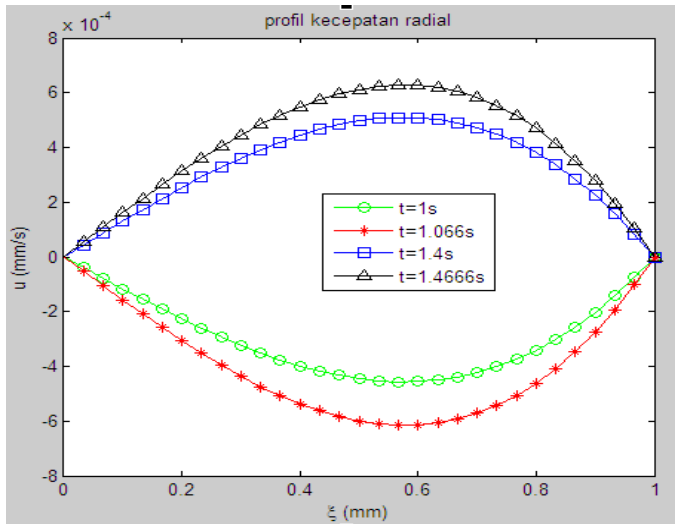
Diberikan nilai $L = 60\text{mm}$, $S_1 = 20\text{mm}$, $Z_1 = 5\text{mm}$, $S_2 = 40\text{mm}$, $Z_2 = 5\text{mm}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.3\text{mm}$, $R_0 = 1\text{mm}$, $f_p = 1.2\text{Hz}$, $k_R = 0.0001$, $\omega = 2 \cdot \pi f_p$, $\phi = 0^\circ$, $A_0 = 500\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-2}$, $A_1 = 0.2A_0$

Ilustrasi hasil dari program Matlab pada sumbu aksial dan radial pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada stenosis arteri yaitu:



Gambar 4.3 Profil kecepatan pada sumbu aksial pada $z=60\text{ mm}$, $t=0.13333\text{ s}$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.3\text{ mm}$

Pada Gambar (4.3) terlihat bahwa nilai kecepatan akan berkurang ketika mendekati arteri stenosis dan nilai kecepatan akan kembali normal ketika menjauhi arteri stenosis. Sehingga penyumbatan pembuluh darah ini dapat menyebabkan berkurangnya kecepatan aksial pada peredaran darah.



Gambar 4.4 Profil kecepatan pada sumbu radial dengan $z=60\text{mm}$, $Re=500$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.3\text{mm}$

Pada Gambar (4.4) terlihat bahwa untuk $t=1$ s menghasilkan kecepatan radial yang nilainya jauh lebih besar dibandingkan dengan kecepatan radial pada $t=1.066$ s dan untuk $t=1.4$ s menghasilkan kecepatan radial yang nilainya jauh lebih kecil dibandingkan dengan kecepatan radial pada $t=1.4666$ s. Sehingga besar atau kecilnya nilai t tidak mempengaruhi pada nilai kecepatan radial.

“ Halaman ini sengaja dikosongkan “

LAMPIRAN

Lampiran A *Source Code* program menggunakan software MATLAB

```
function coba
```

```
for imaks=1:2
```

```
clear all; clc;
```

```
z_atas =60; %panjang sumbu z
```

```
xi_atas =1;%panjang sumbu xi
```

```
t_atas =2; %panjang sumbu t
```

```
waktu = 30; %Masukkan banyak iterasi terhadap waktu
```

```
baris = 30; %Masukkan banyak iterasi terhadap sumbu z
```

```
kolom = 30; %Masukkan banyak iterasi terhadap sumbu xi
```

```
Re=500;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_atas,t_atas,Re);
```

```
sumbuz=0:z_atas/(baris-1):z_atas;
```

```
figure (1)
```

```
plot(sumbuz,w(:,1,2),'go-')
```

```
hold on;
```

```
Re=750;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_atas,t_atas,Re);
```

```
sumbuz=0:z_atas/(baris-1):z_atas;
```

```
plot(sumbuz,w(:,10,3),'r*-')
```

```
hold on;
```

```
Re=1000;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re);
sumbuz=0:z_atas/(baris-1):z_atas;
plot(sumbuz,w(:,1,4),'m^-' )
hold on;
```

```
Re=2000;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re);
sumbuz=0:z_atas/(baris-1):z_atas;
plot(sumbuz,w(:,10,5),'ks-' )
hold on;
```

```
title ('profil kecepatan aksial')
legend ('Re=500','Re=750','Re=1000','Re=2000',0);
xlabel ('z(mm)')
ylabel ('w(mm/s)')
```

```
Re=500;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re);
```

```
figure(2)
plot(linspace(0,1,baris+1),[0 u(2, :,3)],'go-' )
hold on;
```

```
Re=500;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re);
plot(linspace(0,1,baris+1),[0 u(2, :,4)],'rx-' )
hold on;
```

```
Re=500;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re);
plot(linspace(0,1,baris+1),[0 u(2, :, 10)], 'ms-')
hold on;
```

```
Re=500;
```

```
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re);
plot(linspace(0,1,baris+1),[0 u(2, :, 11)], 'k^-' )
hold on;
```

```
title ('profil kecepatan radial')
legend ('t=0.2s','t=0.266666s','t=0.53333s','t=0.6s',0);
xlabel ('\xi(mm)')
ylabel ('u(mm/s)')
end
function
[w,u,dz,dxi,dt]=TA_COBA1(baris,kolom,waktu,xi_atas,z_ata
s,t_atas,Re)
%% Pendifinisian Parameter
for imaks=1:2
    R0=1;
    fp=1.2;pi=3.41;
    omega=2.0*pi*fp;
    s1=20;z1=5;
    s2=40;z2=5;
    phi=0;kr=0.0001;
    A0=500;A1=0.2*A0;
    taum1=0.2;taum2=0.2;
```

```
dz = z_atas/baris;
dxi = xi_atas/kolom;
dt = t_atas/waktu;
%% syarat awal
u=zeros(baris,kolom,waktu);
```

```

w=zeros(baris,kolom,waktu);

d1=(dt/2)*(1/dz);d2=(dt/dz)*(1/Re)*(1/dz);d3=(2/dz)*(dt/dz)*
(1/Re);d4=dt/2;

d5=(1/Re)*(dt/4)*(1/dz);d6=dt/dxi;d7=(1/Re)*(dt/(dxi)^2);d8
=(dt/2)*(1/Re);
d9=((2*dt)/(dxi)^2)*(1/Re);

%% Program ADI
for n=1:waktu
for i=1:baris
for j=1:kolom
az(i,j,n)=w(i,j,n)*(dt/(2*dz))-(1/Re)*(dt/(dz*dz));
bz(i,j,n)=1+(1/Re)*((2*dt)/(dz*dz));
cz(i,j,n)=-w(i,j,n)*(dt/(2*dz))-(1/Re)*(dt/(dz*dz));
end
end
end

syms zt
for n=1:waktu
for i=1:baris
for j=1:kolom

if i>=((s1-z1)/dz)+1 && i<=((s1+z1)/dz)+1
R1=(1+kr*cos((omega*t)-phi))*(1-
(taum1/(2*R0))*(1+cos(pi*(z-s1)/z1)));
else if i>=((s2-z2)/dz)+1 && i<=((s2+z2)/dz)+1
R1=(1+kr*cos((omega*t)-phi))*(1-
(taum2/(2*R0))*(1+cos(pi*(z-s2)/z2)));
else
R1=1+kr*cos((omega*t)-phi);
end

R(i,n)=subs(R1,{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rz(i,n)=subs(diff(R1,z),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});

```

```

Rzz(i,n)=subs(diff(diff(R1,z),z),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rt(i,n)=subs(diff(R1,t),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
    axi(i,j,n)=(d6*(u(i,j,n)/R(i,n))-
(d4*(w(i,j,n)*((j)/R(i,n))*(Rz(i,n))))...
    -(d4*((j)/R(i,n))*(Rt(i,n)))-
(d7*(1/(j))*(1/(R(i,n).^2)))...
    -(d8*((j)/R(i,n))*(Rzz(i,n)))-
(d9*(1/(R(i,n).^2)))...
    +((d8*(j))*(1/(R(i,n).^2))*(Rz(i,n).^2));
bxi(i,j,n)=1+(d9*(2/R(i,n).^2));
    cxi(i,j,n)=(-
d6*(u(i,j,n)/R(i,n)))+(d4*(w(i,j,n)*((j)/R(i,n))*(Rz(i,n))))...

    +(d4*((j)/R(i,n))*(Rt(i,n)))+(d7*(1/(j))*(1/(R(i,n).^2)))...
    +(d8*((j)/R(i,n))*(Rzz(i,n)))-
(d9*(1/(R(i,n).^2)))...
    +((d8*(j))*(1/(R(i,n).^2))*(Rz(i,n).^2));

end
end
end

for n=1:waktu
if (mod(n,2)==1)
for j=1:kolom
for i=1:baris

if i>=((s1-z1)/dz)+1 && i<=((s1+z1)/dz)+1
    R1=(1+kr*cos((omega*t)-phi))*(1-
    (taum1/(2*R0))*(1+cos(pi*(z-s1)/z1));
else if i>=((s2-z2)/dz)+1 && i<=((s2+z2)/dz)+1
    R1=(1+kr*cos((omega*t)-phi))*(1-
    (taum2/(2*R0))*(1+cos(pi*(z-s2)/z2));
else
    R1=1+kr*cos((omega*t)-phi);
end

R(i,n)=subs(R1,{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});

```



```

Rz(i,n)=subs(diff(R1,z),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rzz(i,n)=subs(diff(diff(R1,z),z),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rt(i,n)=subs(diff(R1,t),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});

```

```

if i==1

```

```

    dxi_sweep(i)=(-
(w(i,j,n)*((dt)/(2*dz)))+(1/Re)*((dt)/(dz*dz)))*w(i+1,j,n)+...
    (1-(1/Re)*(dt/(dz*dz)))*w(i,j,n)-...
    (2*dt)*(-(A0+(A1*cos(omega*(n+1)*dt))));

```

```

else if i==baris

```

```

    dxi_sweep(i)=2*((w(i,j,n)*(dt/(2*dz)))+(1/Re)*(dt/(dz*dz)))
*w(i-1,j,n)+...
    (1-(1/Re)*(dt/(dz*dz)))*w(i,j,n)-...
    (2*dt)*(-(A0+(A1*cos(omega*(n+1)*dt))));

```

```

else

```

```

    dxi_sweep(i)=(-
(w(i,j,n)*((dt)/(2*dz)))+(1/Re)*((dt)/(dz*dz)))*w(i+1,j,n)+...
    (1-
(1/Re)*(dt/(dz*dz)))*w(i,j,n)+((w(i,j,n)*(dt/(2*dz)))+(1/Re)*
(dt/(dz*dz)))*w(i-1,j,n)-...
    (2*dt)*(-(A0+(A1*cos(omega*(n+1)*dt))));

```

```

end

```

```

end

```

```

    T1=Metode_Adi(axi,bxi,cxi,dxi_sweep,kolom);
w(1:baris,j,n)=T1;

```

```

end

```

```

else

```

```

for i=1:baris

```

```

for j=1:kolom

```

```

if i>=((s1-z1)/dz)+1 && i<=((s1+z1)/dz)+1

```

```

    R1=(1+kr*cos((omega*t)-phi))*(1-
(taum1/(2*R0))*(1+cos(pi*(z-s1))/z1));

```

```

else if i>=((s2-z2)/dz)+1 && i<=((s2+z2)/dz)+1

```

```

    R1=(1+kr*cos((omega*t)-phi))*(1-
(taum2/(2*R0))*(1+cos(pi*(z-s2))/z2));

```

```

else

```

```

    R1=1+kr*cos((omega*t)-phi);

```

end

```
R(i,n)=subs(R1,{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rz(i,n)=subs(diff(R1,z),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rzz(i,n)=subs(diff(diff(R1,z),z),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
Rt(i,n)=subs(diff(R1,t),{t,z},{(n-1)*dt,(i-1)*dz});
```

if j==1

```
dz_sweep(j)=((-
d6*(u(i,j,n)/R(i,n)))+(d4*(w(i,j,n)*((j)/R(i,n))*(Rz(i,n))))...

+(d4*((j)/R(i,n))*(Rt(i,n)))+(d7*(1/(j))*(1/(R(i,n).^2)))...
+(d8*((j)/R(i,n))*(Rzz(i,n)))-
(d9*(1/(R(i,n).^2)))...

+(((d8*(j))*(1/(R(i,n).^2))*(Rz(i,n).^2))*w(i,j+1,n)+...
(1-(d9*(2/R(i,n).^2)))*w(i,j,n)-...
(2*dt)*(-(A0+(A1*cos(omega*(n+1)*dt)))));
```

else if j==kolom

```
dz_sweep(j)=2*((d6*(u(i,j,n)/R(i,n)))-
(d4*(w(i,j,n)*((j)/R(i,n))*(Rz(i,n))))...
-(d4*((j)/R(i,n))*(Rt(i,n)))-
(d7*(1/(j))*(1/(R(i,n).^2)))...
-(d8*((j)/R(i,n))*(Rzz(i,n)))-
(d9*(1/(R(i,n).^2)))...

+(((d8*(j))*(1/(R(i,n).^2))*(Rz(i,n).^2))*w(i,j-1,n)+...
(1-(d9*(2/R(i,n).^2)))*w(i,j,n)-...
(2*dt)*(-(A0+(A1*cos(omega*(n+1)*dt)))));
```

else

```
dz_sweep(j)=((-
d6*(u(i,j,n)/R(i,n)))+(d4*(w(i,j,n)*((j)/R(i,n))*(Rz(i,n))))...

+(d4*((j)/R(i,n))*(Rt(i,n)))+(d7*(1/(j))*(1/(R(i,n).^2)))...
+(d8*((j)/R(i,n))*(Rzz(i,n)))-
(d9*(1/(R(i,n).^2)))...

+(((d8*(j))*(1/(R(i,n).^2))*(Rz(i,n).^2))*w(i,j+1,n)+...
```

```

            (1-(d9*(2/R(i,n).^2)))*w(i,j,n)+...
            ((d6*(u(i,j,n)/R(i,n)))-
(d4*(w(i,j,n)*((j)/R(i,n))*(Rz(i,n))))...
            -(d4*((j)/R(i,n))*(Rt(i,n)))-
(d7*(1/(j))*(1/(R(i,n).^2))))...
            -(d8*((j)/R(i,n))*(Rzz(i,n)))-
(d9*(1/(R(i,n).^2))))...

+(((d8*(j))*(1/(R(i,n).^2))*(Rz(i,n).^2)))*w(i,j-1,n)-...
            (2*dt)*(-(A0+(A1*cos(omega*(n+1)*dt))));

end
end

T2=Metode_Adi_1(az,bz,cz,dz_sweep,baris);
w(i,1:kolom,n)=T2;
end
end
end
saveTugas_Aw;
for n=1:waktu
for i=1:baris
for j=1:kolom
            u(i,j,n+1)=(j*dxi)*((w(i,j,n)/2)*Rz(i,n)-
(2*Rt(i,n)*((j*dxi).^2 - 1)));
end
end
end
end
function T = Metode_Adi(axi,bxi,cxi,dxi_sweep,kolom)
A=zeros(kolom);
for j=1:kolom
A(j,j)=bxi(j);
if j<kolom
A(j,j+1)=cxi(j);
A(j+1,j)=axi(j);
end
end
T=inv(A)*dxi_sweep';

```

```
function T = Metode_Adi_1(az,bz,cz,dz_sweep,baris)
A=zeros(baris);
for i=1:baris
A(i,i)=bz(i);
if i<baris
A(i,i+1)=cz(i);
A(i+1,i)=az(i);
end
end
T=inv(A)*dz_sweep';
```

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bagian ini akan diuraikan hal-hal yang melatarbelakangi tugas akhir ini yang selanjutnya dituliskan dalam sub perumusan masalah. Dalam bagian ini juga dicantumkan mengenai batasan masalah, tujuan dan manfaat dari tugas akhir ini. Adapun sistematika penulisan tugas akhir ini diuraikan pada bagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Seiring berkembangnya zaman, banyak penelitian yang ingin membuktikan bahwa dinamika fluida memiliki peranan penting dalam pengembangan dan perkembangan pada pembuluh darah arteri. Baik pembuluh darah arteri normal maupun penyempitan arteri. Proses peredaran darah dipengaruhi oleh kecepatan darah, luas penampang pembuluh darah dan kerja otot jantung dan pembuluh darah [2].

Proses peredaran darah pada manusia mengalir melalui pembuluh darah. Peredaran darah ini disebut peredaran darah tertutup. Bukan hanya pembuluh darah yang berperan dalam proses ini, akan tetapi jantung juga ikut berperan. Proses peredaran darah merupakan contoh dinamika fluida dan memiliki peranan dalam perkembangan penyakit arteri.

Salah satu contoh dari penyakit arteri adalah penyempitan arteri. Penyempitan ini bisa terjadi di sepanjang jalur pembuluh darah arteri dalam tubuh manusia. Penyempitan arteri ini terjadi karena penumpukan plak aterosklerosis atau kolesterol yang menempel pada endotel. Aterosklerosis adalah kondisi dimana terjadi penyempitan dan pengerasan di dalam pembuluh darah arteri akibat pengendapan kolesterol dan zat lemak lainnya. Penyakit ini juga dikenal dengan istilah

arteri stenosis. Pada mulanya, kolesterol dibawa oleh darah, menumpuk pada endotel dan semakin lama, tumpukkan kolesterol ini akan mengeras serta mempersempit saluran pembuluh darah arteri. Akibatnya, terjadi gangguan peredaran darah dan pengurangan suplai oksigen dalam tubuh.

Berdasarkan uraian dari permasalahan diatas, maka pada Tugas Akhir ini akan dibahas tentang simulasi numerik dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dan diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga skema ADI (Alternating Direction Implicit). Hasil dari solusi numerik ini akan disimulasikan menggunakan software Matlab 2010a.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis?
2. Bagaimana penyelesaian numerik dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis?
3. Bagaimanakah simulasi dari hasil perhitungan numerik pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dengan menggunakan software Matlab 2010a ?

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini, permasalahan yang akan dibahas akan dibatasi ruang lingkup pembahasannya antara lain :

1. Metode numerik yang dipakai adalah metode beda hingga skema ADI (Alternating Direction Implicit).
2. Profil kecepatan aliran darah pada arteri stenosis akan disimulasikan dengan menggunakan software Matlab 2010a.

3. Profil kecepatan aliran darah yang akan divisualisasikan dengan menggunakan software Matlab 2010a hanya pada arah aksial (streamline) dan arah radial.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan pada tugas akhir ini adalah :

1. Mengetahui model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis.
2. Mengetahui penyelesaian numerik dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis.
3. Mengetahui simulasi dari hasil perhitungan numerik pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dengan menggunakan software Matlab 2010a.

1.5 Manfaat

Manfaat pada tugas akhir ini adalah :

1. Membantu menyelesaikan model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis.
2. Mendapatkan pemahaman dalam menginterpretasikan hasil analisa dan simulasi pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dengan menggunakan software Matlab 2010a.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini berisi tentang landasan teori yang mendukung penelitian, antara lain tentang penelitian sebelumnya, fluida, stenosis arteri, persamaan diferensial parsial, metode beda hingga skema ADI.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan tentang tahap-tahap pengerjaan yang dilakukan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis dan penyelesaian numeriknya serta simulasi dari model matematika tersebut.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah pada bab sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

LAMPIRAN

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai penelitian terdahulu, fluida, stenosis arteri, persamaan diferensial parsial, metode beda hingga, metode beda hingga - Alternating Direction Implicit (ADI) dan persamaan pembangun model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis.

2.1 Penelitian Terdahulu

Banyak penelitian mengenai permasalahan aliran darah pada stenosis arteri. Salah satunya adalah penelitian yang dilakukan oleh Riri Jonuarti [2] yang berjudul Analisis Model Fluida Casson untuk Aliran Darah dalam Stenosis Arteri. Pada penelitian ini, persamaan aliran darah pada kasus arteri stenosis diselesaikan dengan menggunakan model fluida Casson serta hasil profil kecepatannya dibatasi hanya pada kecepatan radial. Selain itu, persamaan resistensi aliran darah pada kasus arteri stenosis diselesaikan dengan model fluida Casson. Dari hasil penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa makin jauh posisi stenosis dari sumbu pembuluh darah makin rendah kecepatan aliran dan untuk resistensi aliran bertambah dengan bertambahnya ukuran (tinggi dan panjang) stenosis, sedangkan resistensi aliran berkurang apabila tegangan geser bertambah.

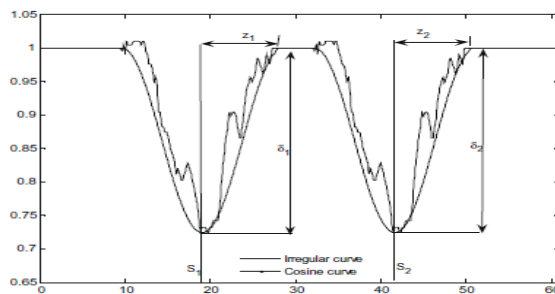
Penelitian lainnya adalah penelitian yang dilakukan oleh Indira Anggriani [3]. Pada penelitiannya, peneliti menggunakan metode Runge-Kutta untuk menyelesaikan model matematika untuk aliran darah pada stenosis arteri. Selain itu, model matematika untuk aliran darah pada stenosis arteri digunakan model matematika aliran tak tunak fluida sisko.

2.2 Fluida

Di alam semesta fase zat dibagi menjadi 3, yaitu padat, gas dan cair. Oleh karena fase gas dan cair memiliki sifat tidak menolak terhadap perubahan bentuk dan kemampuan untuk mengalir, maka fase gas dan cair disebut fluida. Fluida merupakan zat yang mengalami perubahan secara terus menerus bila terkena tekanan geser walaupun relatif kecil. Fluida dibagi menjadi 2, yaitu fluida newtonian dan fluida non newtonian. Fluida sisko merupakan salah satu fluida yang termasuk kedalam fluida non newtonian serta masuk kedalam karakteristik bigham plastik.

2.3 Stenosis Arteri

Pembuluh darah memiliki peran penting dalam proses peredaran darah. Proses ini akan terganggu jika darah yang mengalir melalui pembuluh darah terhalangi. Hal ini terjadi karena didalam pembuluh darah tumbuh suatu endapan lemak. Penyempitan pembuluh darah dalam ilmu kedokteran disebut stenosis arteri serta akan menyebabkan terjadinya serangan jantung dan stroke. Perkembangan lanjut dari stenosis arteri ini akan menyebabkan gangguan peredaran darah yang serius, dimana perilaku aliran darah pada stenosis tersebut sangat berbeda dari keadaan arteri normal [6].



Gambar 2.1 Skema Model Aliran Stenosis

2.4 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih derivatif parsial dan suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas [7]. Tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat persamaan diferensial parsial tersebut. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier tingkat dua dengan dua variabel bebas adalah :

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

dengan A, B, C, D, E, F dan G (konstan atau peubah x, y) tergantung kepada x dan y tetapi tidak tergantung kepada u . Persamaan diferensial parsial tingkat dua dengan variabel bebas x dan y yang tidak mempunyai bentuk diatas, dikatakan non-linier.

Persamaan diatas, diklasifikasikan kedalam persamaan :

1. Persamaan Eliptik jika : $B^2 - AC < 0$
2. Persamaan Parabolik jika : $B^2 - AC = 0$
3. Persamaan Hiperbolik jika : $B^2 - AC > 0$

2.5 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode numerik yang umum digunakan untuk menyelesaikan persoalan teknis dan problem matematis dari suatu gejala fisis. Secara umum metode beda hingga adalah metode yang mudah digunakan dalam penyelesaian masalah fisis yang mempunyai bentuk geometri yang teratur, seperti interval dalam satu dimensi, domain kotak dalam dua dimensi dan kubik dalam ruang tiga dimensi (Li, 2010).

Untuk menerapkan metode beda hingga pada suatu permasalahan diferensial biasa maupun parsial, beberapa hal yang perlu diperhatikan yaitu diskretisasi dari suatu

persamaan, bentuk aproksimasi beda hingga, kondisi syarat akhir dan syarat batas dari skema beda hingga.

Jika $u = u(x, y)$ diekspansikan terhadap Deret Taylor di sekitar titik x_i, y akan menghasilkan :

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \quad (2.1)$$

$$u(x - \Delta x, y) = u(x, y) - \Delta x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots \quad (2.2)$$

Persamaan diatas dapat diatur dalam bentuk sebagai berikut :

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.3)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (2.4)$$

dengan i menandakan posisi x dan j menandakan posisi y .

Pendekatan Turunan Pertama

a. Beda Maju

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.5)$$

b. Beda Mundur

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.6)$$

c. Beda Tengah

Jika Persamaan (2.3) dikurangi dengan Persamaan (2.4) menghasilkan pendekatan beda tengah, yaitu :

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.7)$$

Pendekatan Turunan Kedua

Jika persamaan (2.3) dijumlah dengan persamaan (2.4) menghasilkan pendekatan beda tengah untuk turunan kedua, yaitu

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^3) \quad (2.8)$$

sama halnya dengan derivative terhadap x , jika $u = u(x, y)$ diekspansikan terhadap Deret Taylor di sekitar titik x, y_j akan menghasilkan :

$$\begin{aligned} u(x, y + \Delta y) &= u(x, y) + \Delta y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ &\quad + \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} u(x, y - \Delta y) &= u(x, y) - \Delta y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Persamaan diatas dapat diatur dalam bentuk sebagai berikut :

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \Delta y \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} + \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \dots \quad (2.11)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta y \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} + \frac{\Delta y^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} - \frac{\Delta y^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial y^3} + \dots \quad (2.12)$$

dengan i menandakan posisi x dan j menandakan posisi y .

Pendekatan Turunan Pertama

d. Beda Maju

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (2.13)$$

e. Beda Mundur

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y} + O(\Delta y) \quad (2.14)$$

f. Beda Tengah

Jika Persamaan (2.11) dikurangi dengan Persamaan (2.12) menghasilkan pendekatan beda tengah, yaitu :

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (2.15)$$

Pendekatan Turunan Kedua

Jika persamaan (2.11) dijumlah dengan persamaan (2.12) menghasilkan pendekatan beda tengah untuk turunan kedua, yaitu

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y^3) \quad (2.16)$$

2.6 Metode Beda Hingga - Alternating Direct Implicit (ADI)

Pada metode ini digunakan dua langkah. Langkah pertama derivatif terhadap x dihitung pada waktu ke n dan derivatif terhadap y dihitung pada waktu ke $n + 1$. Sedangkan pada langkah kedua derivatif terhadap x dihitung pada waktu ke $n + 1$ dan derivatif terhadap y dihitung pada waktu ke n .

Untuk mendapatkan gambaran bagaimana menyelesaikan sebuah persamaan differensial parsial menggunakan metode beda hingga – alternating direct implicit (ADI) dibawah ini akan diberikan sebuah ilustrasi contoh permasalahan perpindahan panas konduksi dua dimensi.

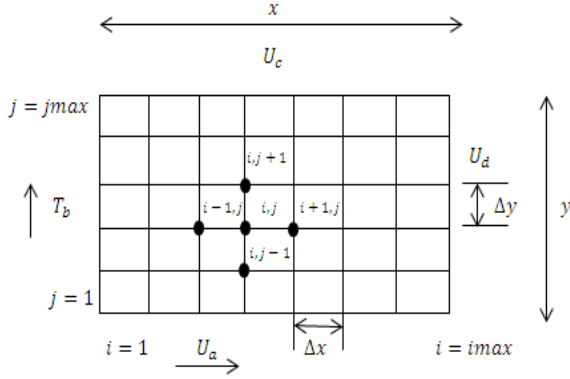
Ilustrasi : Perpindahan panas konduksi dua dimensi

Misalkan diberikan sistem persamaan differensial parsial :

$$\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.17)$$

Sebagai kasus uji akan ditinjau sebuah penampang segi empat dengan lebar W dan tinggi H , dengan kecepatan masing-masing sisi U_a , U_b , U_c , dan U_d , yang dipertahankan tetap atau kondisi batas Dirichlet (Gambar 2.2). dengan mengambil

harga $\Delta x = \Delta y$ dan dengan pengambilan nilai awal kecepatan perhitungan tertentu.



Gambar 2.2 Pengaturan Titik Grid

Chung Yau Lam (1994) dalam bukunya “Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations”, persamaan (2.17) untuk $\Delta x = \Delta y$, dapat ditulis dalam 2 persamaan, yaitu Persamaan (2.17a) dan Persamaan (2.17b).

x-sweep :

$$u_{i-1,j}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1} = -(u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n) \quad (2.17a)$$

Dari Persamaan (2.17a), bila nilai kecepatan pada waktu ke n diketahui, dan dengan mempergunakan kondisi batas yang sesuai, maka dapat diperoleh nilai kecepatan pada waktu ke $n + 1$, karena Persamaan (2.17a) menghasilkan koefisien matrik tridiagonal bila dilakukan perhitungan dari $j = 1$ sampai $j = jmax - 1$, maka akan diperoleh nilai kecepatan pada seluruh node pada waktu ke $n + 1$.

y-sweep :

$$u_{i,j-1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} = -(u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n) \quad (2.17b)$$

Dari Persamaan (2.17b), bila nilai kecepatan pada waktu ke n diketahui, dan dengan mempergunakan kondisi batas yang sesuai, maka dapat diperoleh nilai kecepatan pada waktu ke $n + 1$, karena Persamaan (2.17a) menghasilkan koefisien matrik tridiagonal bila dilakukan perhitungan dari $i = 1$ sampai $i = imax - 1$, maka akan diperoleh nilai kecepatan pada seluruh node pada waktu ke $n + 1$. Langkah x -sweep dan y -sweep umumnya dipandang sebagai satu iterasi yang komplit.

2.7 Persamaan Pembangun Model Matematika dari Permasalahan Aliran Darah pada Arteri Stenosis

Sistem pembuluh darah arteri stenosis dapat dimodelkan secara matematis sebagai tabung elastis tipis dengan bagian melingkar yang mengandung darah. Dapat diberikan (r, θ, z) pada koordinat silinder dimana sumbu z diambil sepanjang sumbu arteri sementara r dan θ adalah sepanjang radial dan arah melingkar. Secara matematis geometri dari model aliran stenosis menurut literatur dapat diberikan sebagai berikut [6] :

$$R(z, t) = \begin{cases} a_1(t) \left[1 - \frac{\delta_1}{2R_0} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(z-S_1)}{Z_1} \right) \right) \right], & S_1 - Z_1 < z < S_1 + Z_1 \\ a_1(t) \left[1 - \frac{\delta_2}{2R_0} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(z-S_2)}{Z_2} \right) \right) \right], & S_2 - Z_2 < z < S_2 + Z_2 \\ a_1(t), & \text{untuk nilai } z \text{ yang lain} \end{cases}$$

dengan $R(z, t)$ menunjukkan jari-jari terjadinya stenosis arteri dan R_0 merupakan jari-jari konstan arteri yang normal di wilayah non stenosis. Fungsi $a_1(t)$ dapat diberikan sebagai berikut :

$$a_1(t) = 1 + k_R \cos(\omega t - \phi)$$

dengan ω adalah frekuensi angular yang dijabarkan menjadi $\omega = 2\pi f_p$, f_p mewakili frekuensi denyut dan k_R menunjukkan konstanta.

Aliran darah stenosis pada arteri dianggap sebagai aliran yang laminar, unsteady, dua dimensi, asimetri dan sepenuhnya berkembang pada aliran darah yang mampat. Menurut asumsi yang diilustrasikan pada literatur, persamaan umum yang membangun atau governing equation dapat dituliskan dalam sistem koordinat silinder sebagai berikut :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.20)$$

dengan w adalah kecepatan aksial dan u adalah kecepatan radial, p adalah tekanan, ρ adalah densitas dan μ adalah viskositas darah.

Gradien tekanan yang dihasilkan oleh aksi pemompaan jantung manusia ditunjukkan dengan $\frac{\partial p}{\partial z}$ dan dinyatakan sebagai berikut :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = A_0 + A_1 \cos \omega t$$

dengan A_0 adalah amplitudo yang bernilai konstan, A_1 merupakan amplitudo dari tekanan gradien sehingga yang menyebabkan terjadinya tekanan sistolik dan diastolik. $\omega = 2\pi f_p$, dan f_p adalah frekuensi denyut.

Secara matematis dapat diberikan kondisi batas pada arteri dengan perbedaan empat kasus yaitu sebagai berikut:

Kondisi batas kecepatan radial dan gradien kecepatan terhadap sumbu yang sejajar dengan pembuluh darah, masing-masing dinyatakan dengan

$$u(r, z, t) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}(r, z, t) = 0 \quad \text{pada } r = 0$$

Kondisi batas kecepatan radial dan kecepatan aksial pada dinding pembuluh darah, masing-masing dinyatakan dengan

$$u(r, z, t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad w(r, z, t) = 0 \quad \text{pada } r = R(z, t)$$

Kondisi batas pada saat dalam keadaan diam adalah

$$u(r, z, t) = 0, \quad w(r, z, t) = 0 \quad \text{pada } t = 0$$

Di dalam hilir, pada jalan keluar dari bagian arteri, gradien nol aksial dari medan kecepatan bisa diasumsikan, yang bisa dinyatakan secara matematis sebagai berikut

$$\frac{\partial w}{\partial z}(r, z, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial z}(r, z, t) \quad \text{pada } z = L$$

L adalah panjang dimensi dari segmen arteri yang dipertimbangkan.

BAB V

PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh pada pembahasan sebelumnya, serta diberikan beberapa saran sehingga dapat digunakan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Dari analisa yang telah dilakukan pada model matematika dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis bahwa:

1. Didapatkan persamaan kekekalan momentum dari permasalahan aliran darah pada arteri stenosis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{2u}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \xi} = -2 \frac{\partial p}{\partial z} + \\ \frac{1}{R_e} \left(\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi R^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \left(\frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\xi}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{2\xi}{R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

2. Didapatkan persamaan kecepatan pada arah radial sebagai berikut:

$$u(\xi, z, t) = \xi \left(-2 \frac{\partial R}{\partial t} (\xi^2 - 1) + \frac{w}{2} \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

3. Bilangan reynold mempunyai pengaruh yang sangat besar pada kecepatan aksial. Nilai bilangan reynold yang semakin kecil akan menyebabkan nilai kecepatan aksial semakin kecil pula, begitu juga sebaliknya. Hal ini disebabkan karena besarnya bilangan reynold sebanding dengan besarnya kecepatan aliran.
4. Besar kecilnya waktu yang digunakan untuk simulasi tidak mempengaruhi nilai kecepatan radial, semakin besar

waktu simulasi belum tentu menyebabkan semakin besar pula kecepatan radialnya, begitu juga dengan semakin kecil waktu simulasi belum tentu menyebabkan semakin kecil pula kecepatan radialnya.

5.2 Saran

Dari hasil yang sudah dicapai, penulis mengusulkan beberapa saran yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya:

1. Pada penulisan Tugas Akhir ini, penulis hanya menjelaskana tentang kecepatan aksial dan radial pada permasalahan aliran darah pada pembuluh darah arteri stenosis, akan lebih baik apabila dapat memberikan perbedaan tekanan dan kosentrasi darah.
2. Pada Tugas Akhir ini diasumsikan aliran mengalir secara laminar. Selanjutnya dapat digunakan aliran mengalir secara turbulen.
3. Pada penulisan Tugas Akhir ini, penulis hanya menampilkan grafik simulasi kecepatan pembuluh darah arteri stenosis pada arah aksial dan radial, akan lebih baik apabila dapat menampilkan visualisasi dari pembuluh darah arteri stenosis.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chakravarty, S., and Mandal, PK. (2000). *Two-dimensional Blood Flow Through Tapered Arteries Under Stenotic Conditions*. Journal of Applied Mathematical Modelling. Egypt.
- [2] Jounarti, R., dan Haryanto, F. (2011). *Analisis Model Fluida Casson untuk Aliran Darah dalam Arteri Stenosis*. Prosiding Simposium Nasional Inovasi Pembelajaran dan Sains 2011 (SNIPS 2011). Bandung, Indonesia.
- [3] Anggriani, I., dan Widodo, B. (2014). *Studi Tentang Aliran Tak Tunak Fluida Sisko Arteri Stenosis*. Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains IX, Fakultas Sains dan Matematika, UKSW.
- [4] Mustapha, N., Amin, N., Chakravarty, S., and Mandal, PK. (2009). *Unsteady Magnetohydrodynamic Blood Flow Through Irregular Multi-Stenosed Arteries*. Journal of Computers in Biology and Medicine.
- [5] Widodo, B. (2010). *Pemodelan Matematika*. ITS Press Surabaya.
- [6] Mustapha, N., Mandal, PK., Johnston, PR., and Amin, N. (2010). *A Numerical Simulation of Unsteady Blood Flow Through Multi-Irregular ArteriStenoses*. Journal of Applied Mathematical Modelling.
- [7] Soehardjo. (2004). *Persamaan Diferensial Parsial*. Jurusan Matematika. Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [8] Widodo, B., Anggriani, I., Khalimah, DA., Zainal, FDS., and Imron, C. (2016). *Unsteady Boundary Layer Magnetohydrodynamics In Micropolar Fluid Past A Sphere*. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 100, Number 2, pp 291-299
- [9] Widodo, B., Khalimah, DA., and Imron, C. (2015). *Viscous Fluid Flow With Presence Of Magnetic Field*

Past An Elliptical Cylinder. The 6th Annual Basic Science International Conference.

- [10] Widodo, B., Imron, C., Asiyah, N., Siswono, GO., and Purbadini. (2016). *Viscoelastic Fluid Flow Pass A Porous Circular Cylinder When The Magnetic Field Include*. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) Volume 99, Number 2, pp 173-186

BIODATA PENULIS



Penulis memiliki nama lengkap Filsiana Nur Alif Rosdiani, lahir di Surabaya, 18 Maret 1993. Terlahir sebagai anak kedua dari 3 bersaudara. Sejak usia dini, penulis telah menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Raden Rahmat Surabaya (1997-1999), SDN Karah VI Surabaya (1999-2005), SMP Negeri 21 Surabaya (2005-2008),

dan SMA Negeri 18 Surabaya (2008-2011). Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi kejenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya melalui jalur SNMPTN Undangan dengan NRP 1211 100 008 dan memilih Simulasi dan Pemodelan Sistem sebagai bidang keahliannya.

Selama menempuh pendidikan di ITS, penulis juga aktif berorganisasi di Lembaga dakwah Jurusan Matematika ITS, Ibnu Muqlah sebagai staff Departemen Kaderisasi (2013-2014).

Mengingat masih perlu ada perbaikan dan pengembangan dalam Tugas Akhir ini, silahkan kirimkan kritik dan saran melalui email

filsiananur@gmail.com

“Halaman ini sengaja dikosongkan”